

## РАДИАЦИОННАЯ ЭКОЛОГИЯ

УДК 581.6.08:519.862.3

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ НАКОПЛЕНИЯ РАДИОНУКЛИДА РАСТИТЕЛЬНОЙ БИОМАССОЙ**

Н.М. Качурин, А.М. Лебедев, А.А. Кузнецов, В.И. Крюков

(Тульский государственный университет, Тульский НИИСХ)

В результате аварии на Чернобыльской АЭС одним из наиболее пострадавших регионов оказалась Тульская область, в которой площадь загрязнения радионуклидами (РН) достигает 14,5 тыс. км<sup>2</sup> (56,3 % общей площади). Загрязнению подверглись 17 из 23 районов области и 1 город областного подчинения; на этой территории проживает половина населения области. Площадь сельскохозяйственных угодий в загрязнённой зоне составила 1206,8 тыс. га (61 %), в том числе 992,8 тыс. га пашни. Плотность загрязнения достигала 15 Ки/км<sup>2</sup>. Основным числовым показателем, характеризующим неблагоприятные для человека последствия радиоактивного загрязнения, является доза облучения. Оценка эффективных эквивалентных доз в различных пунктах Европейской части бывшего СССР на территории радиоактивного следа аварии на Чернобыльской АЭС показала, что доля внешнего облучения составила 42,8...66,2 %, доля внутреннего облучения, связанного с пероральным поступлением РН, -29...37,2 %, а доля внутреннего облучения, обусловленного ингаляционным поступлением РН, - 2,5...25 % от общей дозы облучения в зависимости от плотности загрязнения местности [4].

Таким образом, основным источником образования дозы внутреннего облучения служит активность радионуклида, накопленного организмом в результате его миграции по пищевым цепям, в основании которых находится биомасса, накопленная растениями в ходе вегетации и служащая первичным депо радиоактивности, поступающей из почвы загрязнённой территории.

Кроме того, так как из почвы РН первоначально поступают в растения, и накопление их обусловлено метаболизмом веществ в растениях, следует ожидать тесной связи процессов накопления радиоактивности и роста биомассы. С известной долей абстракции, многоклеточный организм растения можно рассматривать как развивающуюся популяцию клеток. Поэтому следует ожидать, что математический аппарат, разработанный для изучения динамики роста популяций, может быть использован для описания процесса роста биомассы, тем более что подобные методы применяются при описании биологических продукционных процессов различных уровней: от микробиологического до экологического [1,2].

Таким образом, развитие популяций является хорошо изученным процессом и вполне адекватно описывается так называемыми логистическими уравнениями. Естественно предположить применимость логистических уравне-

ний для описания прироста растительной биомассы. Вторым основанием для такого предположения служат результаты натуральных наблюдений, располагающиеся вблизи S-образной кривой, характерной для графиков решений уравнений логистического типа.

Исходной формой записи логистического уравнения, позволяющей хорошо понять физико-математические основания формирования структуры логистического уравнения, является следующая зависимость [3]:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \cdot x - \delta \cdot x^2$$

где  $x(t)$  - величина, изменение которой исследуется.

Перейдём далее к определению конкретного вида уравнений прогнозной модели накопления РН растениями. Самым простым является формирование уравнения прироста биомассы. Для этого достаточно преобразовать записанное выше логистическое уравнение к форме, более полно отражающей биологическую сущность изучаемого процесса:

$$\frac{dm}{dt} = r \cdot m \cdot \left[1 - \frac{m}{m_f}\right]$$

где  $m$  - величина биомассы, накопленной растениями, произрастающими на единице площади к моменту времени  $t$ ;

$m_f$  - конечное (предельное) значение биомассы, обусловленное генетическими возможностями растений в данных условиях (значение биомассы в момент времени  $t = \infty$ );

$r$  - коэффициент, характеризующий интенсивность прироста биомассы.

Менее очевидной является структура второго уравнения системы, непосредственно описывающего процесс накопления радиоактивности в биомассе. Прежде всего необходимо отметить, что процесс перехода РН из почвы в растения связан с взаимодействием загрязнённой почвы и биологических процессов, протекающих в самом растении. Следовательно, возможно представление скорости накопления РН в виде произведения двух факторов:

$$\frac{dm_{PH}}{dt} = k(m, m_{PH}) \cdot a_{поч}$$

где  $m_{PH}$  - активность, накопленная биомассой растений, произрастающих на единице площади к моменту времени  $t$ ;

$a_{поч}$  - удельная активность почвы, характеризующая влияние почвы на ход накопления РН;

$k(m, m_{PH})$  - коэффициент, учитывающий влияние биологических процессов на интенсивность накопления РН (в общем случае зависит от величины биомассы  $m$  и величины накопленной активности  $m_{PH}$ ).

В свою очередь коэффициент  $k(m, m_{PH})$  также является следствием взаимодействия двух процессов (роста биомассы и накопления в ней РН) и может быть представлен в виде суперпозиции двух слагаемых, описывающих процесс накопления РН в результате прироста биомассы и процесс торможения

накопления в результате действия ранее накопленной активности, так как возможности растений по накоплению РН ограничены и по мере исчерпания этих возможностей величина скорости накопления РН должна уменьшаться:

$$k(m, m_{PH}) = k_m \cdot m + k_B \cdot m_{PH} \cdot m$$

где  $k_m$  - коэффициент пропорциональности определяемый опытным путём;  
 $k_B$  - коэффициент пропорциональности, который определяется опытным путём и должен принимать значения меньше нуля для отражения замедления скорости накопления РН ( $k_B < 0$ ).

Таким образом, дифференциальное уравнение для скорости накопления РН окончательно принимает вид:

$$\frac{dm_{PH}}{dt} = (k_B \cdot m_{PH} \cdot m + k_m \cdot m) \cdot a_{no}$$

Объединяя уравнения для скоростей накопления биомассы и радионуклидов, получаем математическую модель, пригодную для осуществления краткосрочного (в пределах одного вегетационного цикла) динамического прогноза в виде системы дифференциальных уравнений, дополненной соответствующими начальными условиями

$$\begin{cases} \frac{dm_{PH}}{dt} = (k_B \cdot m_{PH} \cdot m + k_m \cdot m) \cdot a_{no} \\ \frac{dm}{dt} = r \cdot m \cdot \left[ 1 - \frac{m}{m_r} \right] \end{cases} \quad (1)$$

$$m(0) = m_0 \neq 0$$

$$m_{PH}(0) = m_{PH0}$$

где  $m_0$  и  $m_{PH0}$  - значения биомассы и накопленной активности в исходный момент времени.

Необходимо отметить, что для логистического уравнения биомассы, с целью предотвращения фиксации нулевого значения скорости её прироста, начальное значение  $m_0$  не должно равняться нулю. Впрочем последнее обстоятельство ни в коей мере не противоречит биологическим особенностям роста растений, так как в этом случае  $m_0$  соответствует массе семян, внесённой в землю при посеве на единицу площади. Следовательно, величина  $m_{PH0}$  будет численно равна активности семян, посеянных на этой единице площади.

С целью уточнения прогноза можно дополнить полученную систему уравнением, учитывающим изменение удельной активности почвы вследствие радиоактивного распада

$$\frac{da_{no}}{dt} = \lambda \cdot a_{no}$$

где  $\lambda$  - постоянная радиоактивного распада для данного радионуклида.

Однако, при ближайшем рассмотрении затраченные вычислительные усилия могут оказаться напрасными, так как, например, для  $^{137}\text{Cs}$  уменьшение активности за год вследствие распада составит около 2%, а обеспечить сопоставимую точность при определении эмпирических коэффициентов модели более чем затруднительно.

Значения коэффициентов полученной системы дифференциальных уравнений могут быть определены только экспериментальным путём в результате обработки данных натуральных наблюдений за динамикой роста биомассы и накопления активности в течение всего вегетативного периода. При этом производится отбор проб растительной биомассы с фиксированной площади, для каждой из которых определяется вес высушенной биомассы с усреднением значений текущей урожайности по пробам одной культуры, отобранным в один и тот же момент времени.

Полученный массив данных уже можно использовать для определения коэффициентов уравнения скорости прироста биомассы. В то же время для вычисления коэффициентов второго уравнения необходимо провести измерение удельной активности каждой пробы по изучаемому радионуклиду. Так как активность биомассы растений невелика (максимум несколько десятков Бк/кг), то необходимо применять измерительные приборы с высокой чувствительностью, например, гамма-спектрометр с полупроводниковым детектором, использованный в наших экспериментах. Полученные результаты также усредняются по однотипным пробам, отобраным в один и тот же момент времени.

Для уменьшения объёма вычислений необходимо провести предварительную обработку полученных экспериментальных данных с целью перехода от массовых параметров к оценкам скоростей изменения биомассы и содержащейся в ней активности радионуклидов.

Такое преобразование исходных данных обусловлено линейной зависимостью скоростей изменения массовых величин от определяемых коэффициентов, что позволяет использовать для вычисления этих коэффициентов хорошо разработанный классический линейный метод наименьших квадратов.

В связи с высокой трудоёмкостью получения и обработки результатов экспериментов исследования были ограничены наиболее важными продовольственными и техническими культурами и выполнялись на базе одного из хозяйств Плавского района Тульской области, которое расположено на территории радиоактивного следа аварии на Чернобыльской АЭС. В качестве таких культур были выбраны озимая пшеница, яровая пшеница, картофель, сахарная свёкла.

Полученные в итоге обработки опытных данных значения коэффициентов системы (1) приводятся в табл. 1, а результаты сравнения экспериментальных и расчётных данных в табл. 2 (для наилучшего и наихудшего из полученных результатов). Значения коэффициентов корреляции для предлагаемых моделей с рассчитанными по опытным данным параметрами находятся в диапазоне 0,94...0,99.

В случае сельскохозяйственного использования (или такой вероятной возможности) загрязнённого радионуклидами участка территории возникает задача оперативного прогноза поступления РН в биомассу в ходе процесса вегетации с целью отслеживания динамики этого процесса для принятия решения о дальнейшей судьбе урожая при превышении допустимого уровня его

**Таблица 1**  
**Значения коэффициентов модели накопления <sup>137</sup>Cs растениями**

№ п/п	Название культуры	Кв, га/(Бк день)	К <sub>м</sub> 1/день	г, 1/день	м <sub>г</sub> , ц/га
1	Оз. пшеница, колос	-0.00001293	0.000541	0.0908	79.71
2	Оз. пшеница, солома	-0.00000685	0.001071	0.0497	91.62
3	Яр. пшеница, колос	-0.00001028	0.000396	0.1007	89.30
4	Яр. пшеница, солома	-0.00001002	0.000985	0.0584	91.91
5	Картофель, клубни	-0.00000360	0.000475	0.0697	140.19
6	Сах. свекла, корни	-0.00001260	0.000846	0.0535	49.21
7	Сах. свекла, ботва	-0.00001111	0.002666	0.0508	62.77

**Таблица 2**  
**Сравнение данных измерений с результатами расчётов при изучении накопления <sup>137</sup>Cs растениями**

Номер пробы	Время, дни	Биомасса, ц/га		Относит, погрешн. %	Активность по <sup>137</sup> Cs, кБк/га		Относ, погр. %
		Измерен.	Расчётн.		Измер.	Расчётн.	
<b>Озимая пшеница, колос</b>							
1	0.	12.47	12.47	-	12.47	12.47	-
2	14.	22.3	31.73	42	18.58	19.89	7
3	30.	63.1	58.89	7	34.14	31.16	9
4	43.	68.3	71.90	5	36.2	37.26	3
5	58.	75.75	77.55	2	39.84	40.33	1
<b>Сахарная свекла, ботва</b>							
1	8.	2	2.95	48	11	11	-
2	58.	23.9	24.21	1	133.84	75.42	44
3	74.	31	36.80	19	148.18	121.47	18
4	86.	50.98	45.37	11	202.9	157.01	23
5	100.	51.9	52.82	2	210.71	190.99	9

загрязнения РН. Предлагаемая система дифференциальных уравнений представляет собой математическое описание накопления РН в ходе развития растений, необходимое для реализации подобного прогноза. Следует отметить, что данный прогноз относится к краткосрочным (на период одного вегетационного цикла), но допускает более детальное описание динамики процесса перехода РН из почвы в растительную биомассу по сравнению с прогнозом, основанным на использовании коэффициента накопления. В качестве критерия оценки последствий накопления РН в биомассе используются действующие временные допустимые уровни содержания радионуклида в данной сельскохозяйственной продукции. С другой стороны, последовательное применение одной и той же модели для нескольких вегетационных циклов подряд, в том числе с учётом севооборота, позволяет с некоторой погрешностью расширить временные рамки подобного прогноза.

*Последняя (167) страница со списком литературы в электронной копии публикации по техническим причинам утрачена. См. её в бумажном оригинале публикации.*